

Smíšené úlohy – bez opakování

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(n) = n!$$

$$K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Příklady

- ① Kolika způsoby lze u startovní čáry seřadit osm závodních automobilů do dvou řad po čtyřech vozech, jestliže

a) v každé řadě záleží na pořadí

nejprve vybereme do 1. řady 4 auta z 8 a ty lze seřadit v různém pořadí

a pak do 2. řady zbývající 4 auta a ty lze opět seřadit v různém pořadí

$$p = K(4, 8) \cdot P(4) \cdot \underbrace{K(4, 4)}_1 \cdot P(4) = \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4! = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} \cdot 4! \cdot 4! = 8! = 40\,320$$

b) na pořadí v řadách nezáleží

do 1. řady vybereme 4 z 8 aut (nezáleží na pořadí)

a pak do 2. řady zbývající 4 auta (nezáleží na pořadí)

$$p = K(4, 8) \cdot \underbrace{K(4, 4)}_1 = \binom{8}{4} \cdot 1 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$$

- ② Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 postavit 5 různých figur tak, aby dvě stály na černých a tři na bílých polích. (Č ... černá, B ... bílá pole)

vybereme 2 pole z 32 Č a 3 pole z 32 B (kombinace bez opak.) a pak umístím 5 různých figur, které lze umístit v různém pořadí (5tice, záleží na pořadí – permutace)

$$p = K(2, 32) \cdot K(3, 32) \cdot P(5) = \binom{32}{2} \cdot \binom{32}{3} \cdot 5!$$

$$p = \frac{32 \cdot 31}{2 \cdot 1} \cdot \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 10 = 295\,219\,200$$

- ③ Kolika způsoby lze „přemístit“ písmena slova BEROUNKA tak, aby některá skupina po sobě jdoucích písmen utvořila

a) slovo BERAN

$$\boxed{BERAN} \quad p = P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

b) slova NERO, KUBA

$$\boxed{KUBA} \boxed{NERO} \quad \text{nebo} \quad \boxed{NERO} \boxed{KUBA} \quad p = P(2) = 2 \quad (\text{uspoř. dvojice})$$

c) slova BUK, NORA v libovolném pořadí

$$\boxed{BUK} \cdot \boxed{NORA} \quad p = P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- ④ Na maturitním večíрку je 15 hochů a 12 děvčat. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat 4 taneční páry? (H ... hoši, D ... dívky)

vyb. 4 H z 15 (nezál. na pořadí) a k nim 4 D z 12 (záleží na poř.)

$$p = K(4, 15) \cdot V(4, 12)$$

$$p = \binom{15}{4} \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 16\,216\,200$$

$$[2. \text{ zp. obráceně } p = K(4, 12) \cdot V(4, 15)]$$

- ⑤ Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze (každá nejvýše jednou) cifry 3, 5, 7, 9. $x < 500$ max. 3místná (záleží na pořadí)

$$\begin{array}{lll} 3\text{místná začín. } 3 & 3 \dots & V(2, 3) = 3 \cdot 2 = 6 \\ 2\text{místná} & \dots & V(2, 4) = 4 \cdot 3 = 12 \\ 1\text{místná} & \dots & V(1, 4) = 4 \cdot 1 = 4 \end{array} \quad p = 6 + 12 + 4 = 22$$

- ⑥ Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi, jejichž dekadický zápis je utvořen z číslic 0, 1, 2, 3, 5, 7. záleží na pořadí

$$\begin{array}{l} \text{počet všech } (\dots) - \text{počet s nulou na začátku } (0 \dots) \\ p = V(4, 6) - V(3, 5) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \end{array}$$

- a) Kolik z těchto číslic končí jedničkou?

$$\begin{array}{l} \dots 1 - 0 \dots 1 \\ p = V(3, 5) - V(2, 4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48 \end{array}$$

- b) Kolik z těchto čísel je lichých?

lichá čísla končí 1 nebo 3 nebo 5 nebo 7 (bez 0 na zač.)

$$\begin{array}{ll} \dots 1 - 0 \dots 1 & \\ \dots 3 - 0 \dots 3 & p = 4 \cdot [V(3, 5) - V(2, 4)] \\ \dots 5 - 0 \dots 5 & p = 4 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3) = 192 \\ \dots 7 - 0 \dots 7 & \end{array}$$

- ⑦ V kupé železničního vagónu jsou proti sobě 2 lavice po pěti místech. Z deseti cestujících si čtyři přejí sedět ve směru jízdy, tři proti směru a zbývajícím třem je to lhostejné. Určete, kolika způsoby se mohou rozsadit.

4 cestující, kteří chtějí sedět ve směru jízdy lze posadit na 5 míst $V(4, 5)$ zp.

a pak 3 cestující, kteří chtějí sedět proti směru jízdy lze na 5 míst posadit $V(3, 5)$ zp.

a pak 3 cestující, kterým je to jedno, lze posadit na zbývajících místa $P(3)$ zp.

$$p = V(4, 5) \cdot V(3, 5) \cdot P(3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 43\,200$$

- ⑧ Kolika způsoby se kolem kulatého stolu může posadit pět mužů a pět žen tak, aby žádné dvě neseděly vedle sebe.

figl: očíslovíme místa 1 až 10

posadíme muže na čísla 1, 3, 5, 7, 9 a ženy na čísla 2, 4, 6, 8, 10

nebo obráceně muže na čísla 2, 4, 6, 8, 10 a ženy na čísla 1, 3, 5, 7, 9

$$p = P(5) \cdot P(5) + P(5) \cdot P(5) = 2 \cdot P(5) \cdot P(5) = 2 \cdot 5! \cdot 5! = 28\,800$$

- ⑨ V kolika bodech se protíná 12 přímek v rovině, z nichž 5 je rovnoběžných a žádné tři neprocházejí jedním bodem?

z každé dvojice různoběžných přímek 1 průsečík, nezáleží na pořadí přímek

počet všech průsečíků (počet různých dvojic přímek z 12) – počet průsečíků, kdyby 5 rovnoběžných přímek nebylo rovnoběžných a protínalo se (počet různých dvojic přímek z 5)

$$p = K(2, 12) - K(2, 5) = \binom{12}{2} - \binom{5}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 11 - 10 = 66 - 10 = 56$$